İST 206 OLASILIK TEORİSİ - II KONULARI

I. MOMENTLERE DAYALI ÖLÇÜLER

- Çarpıklık ve Basıklık Katsayıları

II. RASGELE DEĞİŞKENLERİN FONKSİYONLARI

- Olasılık Dağılımlarının Bulunması: Dağılım Fonksiyonu Tekniği ve Değişken Değiştirme Tekniği
- Beklenen Değer, Varyans ve Momentlerin bulunması, Olasılık Hesaplamaları.

III. RASGELE DEĞİŞKENİN KARAKTERİSTİK FONKSİYON

IV. OLASILIK DAĞILIMLARI

A- KESİKLİ OLASILIK DAĞILIMLARI

Bernoulli, Binom, Çok terimli (multinomial), Geometrik, Negatif Binom (pascal), Hipergeometrik, Poisson, Binom dağılımının Poisson dağılımına yaklaşım, Kesikli Düzgün dağılım.

B- SÜREKLİ OLASILIK DAĞILIMLARI

Normal, Standart Normal, Binom dağılımına Normal Yaklaşım, Sürekli Düzgün dağılım, Üstel Dağılım, Gamma Dağılımı, Beta Dağılımı, Cauchy Dağılımı, Weibull Dağılımı, Log-Normal Dağılım.

V. LİMİT TEOREMLERİ

- Markov Eşitsizliği, Chebyshev Eşitsizliği, Büyük Sayılar Kanunu, Merkezi Limit Teorisi.

VI. ÖRNEKLEME DAĞILIMLARI

- Ki-kare Dağılımı, Student t-Dağılımı, F-Dağılımı.

I. MOMENTLERE DAYALI ÖLÇÜLER

Genel olarak k sabit bir sayıyı göstermek üzere $E(X-k)^r$ şeklinde tanımlanan beklenen değere X- t.d. nin k'ya göre r. momenti denir. Momentler genel olarak üç grupta incelenir.

1- Orjine göre momentler: Başlangıç (sıfır) (k=0 için) noktasına göre momentler olarak da adlandırılırlar. r, moment derecesini göstermek üzere başlangıç noktasına göre r. nci moment;

X, t.d. kesikli ise $m_r = E(X^r) = \sum_{R_X} x^r \cdot p(x)$

$r = 0, 1, \dots$

X, t.d. sürekli ise $m_r = E(X^r) = \int_{R_X} x^r \cdot f(x) \cdot dx$

Orjine göre bazı momentler;

$r=0$ için $m_0 = 1$

$r=1$ 〃 $m_1 = E(X)$

$r=2$ 〃 $m_2 = E(X^2)$.

2- Herhangi bir a noktasına göre momentler: Bir t.d. nin a noktasına göre momenti, bu t.d. nin a ile farkının kuvvetlerinin beklenen değeridir ve μ_r ile gösterilir.

$$\mu_r = E(X-a)^r$$

X t.d. kesikli ise $\mu_r = \sum_{R_X} (x-a)^r \cdot p(x)$

X t.d. sürekli ise $\mu_r = \int_{R_X} (x-a)^r \cdot f(x) \cdot dx$

şeklinde hesaplanır.

3- Aritmetik ortalamaya göre momentler: Bir X t.d. nin kendi ortalamasından sapmasının kuvvetlerinin beklenen değeridir.

$$\mu_r = E(X-\mu)^r$$

formülü ile ifade edilir.

Ortalamaya göre momentleri, başlangıç (orjin) noktasına göre momentler cinsinden yazabiliriz.

$$E(X) = \mu = m_1$$

$$\mu_1 = E(X-\mu) = E(X) - \mu = m_1 - m_1 = 0$$

$$\begin{aligned}\mu_2 = E(X-\mu)^2 &= E(X^2 - 2X\mu + \mu^2)\\ &= E(X^2) - 2E(X)\mu + \mu^2\\ &= m_2 - 2m_1 m_1 + m_1^2\\ &= m_2 - m_1^2 = \sigma^2\end{aligned}$$

(ortalama etrafındaki ikinci moment varyanstır.)

$$\begin{aligned}\mu_3 = E(X-\mu)^3 &= E(X^3 - 3X^2\mu + 3X\mu^2 - \mu^3)\\ &= E(X^3) - 3E(X^2)\mu + 3E(X)\mu^2 - \mu^3\\ &= m_3 - 3m_2 m_1 + 3m_1 m_1^2 - m_1^3\\ &= m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3\end{aligned}$$

Bu şekilde devam edilirse, başlangıca göre momentlerden ortalamaya göre momentlere geçiş için

$$\mu_r = E(X-\mu)^r = E\left[\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i} X^i (-\mu)^{r-i}\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i} m_i (-\mu)^{r-i}$$

* binom formülü kullanılır.

Tersi durumda ortalama etrafındaki momentlerden de başlangıç noktasındaki momentlere geçiş için aşağıdaki dönüşüm yapılır:

$$m_r = E(X^r) = E[(X-\mu)+\mu]^r \text{ yazılır,}$$

$$= E\left[\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (X-\mu)^i \cdot \mu^{r-i}\right] \quad , \quad \mu_i = E(X-\mu)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \mu_i \cdot \mu^{r-i} \quad \text{olur.}$$

Buradan; $m_1 = \mu + \underbrace{\mu_1}_{=0} = \mu$

$E(X-\mu)=0$

$$m_2 = \mu^2 + \mu_2$$

$$m_3 = \mu_3 + 3\mu_2 \cdot \mu + \mu^3$$

bulunur. Bu tür momentler teorik amaçlar için faydalıdır. Momentlerin bazıları istatistiksel dağılımlar için kullanılırlar.

Momentlerle ilgili Dağılım ölçüleri:

* 1- Değişim Katsayısı;

$$\boxed{D.K = \frac{\sigma}{\mu}} = \beta$$

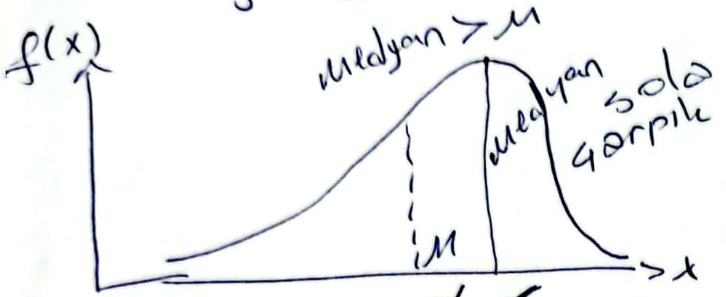
2- Çarpıklık Katsayısı; Bir t.d. nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiğinin ortalamaya göre durumunun bir ölçüsüdür (simetrikliğinin) ve

$$\boxed{\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}}$$

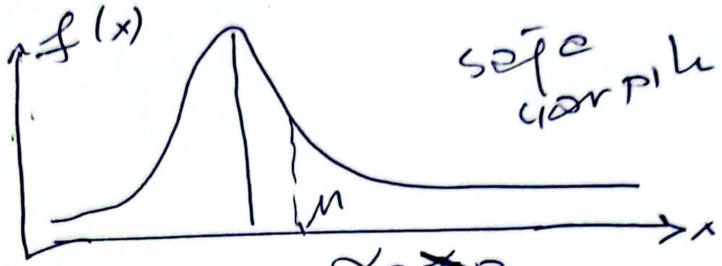
olarak tanımlanır.

Hesaplama sonucunda,

- $\alpha_3 = 0$ ise fonksiyonun grafiği ortalamaya göre simetrik,
- $\alpha_3 > 0$ ise grafik sağa çarpık,
- $\alpha_3 < 0$ ise sola çarpıktır denir.



$\alpha_3 < 0$



$\alpha_3 > 0$

3- Basıklık Katsayısı; Bir t.d.nin o.y.f.nun yatay eksene göre durumunun bir ölçüsü olarak kullanılır ve

$$\boxed{\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3}$$

olarak tanımlanır.

- $\alpha_4 = 0$ ise basıklık normal
- $\alpha_4 > 0$ " " (normale göre) sivri bir grafik
- $\alpha_4 < 0$ " " basık bir grafik.

ÖRNEK: X, t.d.nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{56}(x+3) & ; \quad 0 < x < 8 \\ 0 ; & \quad d.h. \end{cases}$$

veriliyor.

a.) m_1, m_2 ve μ_3'ü bulunuz?

b.) $E(x)$, $V(x)$ ve σ'yı bulunuz?

c.) β, α_3 ve α_4 katsayılarını bulunuz?

Çözüm : Sıfır civarındaki birinci moment
X t.d. sürekli olduğu için,

a.) $m_1 = E(x) = \int_{\mathbb{R}_x} x \cdot f(x) \cdot dx$

$= \int_0^8 x \cdot \frac{1}{56} \cdot (x+3) \cdot dx$

$= \frac{1}{56} \cdot \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_0^8$

$= \frac{1}{56} \cdot \left(\frac{512}{\underset{(2)}{3}} + \frac{192}{\underset{(3)}{2}} \right) = \frac{1}{56} \cdot \left(\frac{1600}{6} \right) = 4{,}76$

$m_2 = E(x^2) = \int_0^8 x^2 \cdot \frac{1}{56} \cdot (x+3) \cdot dx = \frac{1}{56} \cdot \left(\frac{x^4}{4} + x^3 \right) \Big|_0^8$

$= \frac{1}{56} \cdot \left(\frac{4096}{4} + 512 \right) = \frac{1}{56} \cdot \left(\frac{6144}{4} \right) = 27{,}43$

$m_3 = E(x^3) = \int_0^8 x^3 \cdot \frac{1}{56} \cdot (x+3) \cdot dx = \frac{1}{56} \cdot \left(\frac{x^5}{5} + \frac{3}{4} \cdot x^4 \right) \Big|_0^8$

$= \frac{1}{56} \cdot \left(\frac{32.768}{5} + \frac{12.288}{4} \right) = \frac{1}{56} \cdot \left(\frac{192.512}{20} \right)$

$= 171{,}89$

$\mu_3 = E(x-\mu)^3 = m_3 - 3 m_1 \cdot m_2 + 2 m_1^3$

$= (171{,}89) - 3 \cdot (4{,}76) \cdot (27{,}43) + 2 \cdot (4{,}76)^3 = -4{,}1$

b.) $E(x) = \mu = m_1 = 4{,}76$

$V(x) = E(x-\mu)^2 = E(x^2 - 2x\mu + \mu^2)$

$= m_2 - m_1^2 = (27{,}43) - (4{,}76)^2 = 4{,}77$

$\Rightarrow \sigma = 2{,}18$

c.) $D.K. = \beta = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{2{,}18}{4{,}76} = 0{,}45$

Çarpıklık $\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{-4{,}1}{(2{,}18)^3} = \frac{-4{,}1}{10{,}36} = -0{,}39 < 0$

Dağılım sola çarpık.

Basıklık katsayısı

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

burada ortalama etrafındaki 4. moment,

$$\mu_4 = E(x-\mu)^4 = E(x^4 - 4x^3\mu + 6x^2\mu^2 - 4x\mu^3 + \mu^4$$

$$= E(x^4) - 4.\mu E(x^3) + 6.\mu^2.E(x^2) - 4\mu^3 E(x) + \mu^4$$

$$= m_4 - 4.m_1.m_3 + 6m_1^2.m_2 - 4m_1^3.m_1 + m_1^4$$

$$\Rightarrow \mu_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4$$

burada $m_4 = E(x^4) = \int_0^8 x^4 . \frac{1}{56} . (x+3).dx$

$$= \frac{1}{56} . \left(\frac{x^6}{6} + \frac{3}{5}x^5\right)\Big|_0^8$$

$$= \frac{1}{56} . \left(\frac{262144}{6} + \frac{98304}{5}\right)$$

$$m_4 = 1131,27$$ //

Böylece; $\mu_4 = (1131,27) - 4.(4,76).(171,89) + 6.(4,76)^2.(27,4\ldots) - 3.(4,76)^4$

$$= 47,37$$ //

Sonuç olarak basıklık katsayısı,

$$\alpha_4 = \frac{(47,37)}{(2,18)^4} - 3 = -0,9 < 0$$

X t.d. nin yoğunluk fonk.nun grafiği normale göre daha basıktır. //

ÖRNEK: Bir para iki kez atılıyor ve X t.d. Tura gelme sayısını göstersin. X'in değişim katsayısını bulunuz.

ÇÖZÜM: para deneyinde
X: Tura gelme sayısını göstersin.
Bu deneyin örnek uzayı şöyle olur,

$S = \{(T,T), (T,Y), (Y,T), (Y,Y)\}$.

Bu olayın olasılık tablosu şu şekilde olur.

X	0	1	2
$p(X=x)$	1/4	2/4	1/4

$$\mu = E(x) = m_1 = \sum_{i=1}^{3} x_i . p(x_i)$$
$$= 0.\frac{1}{4} + \frac{1.2}{4} + 2.\frac{1}{4} = 1$$

$$m_2 = E(x^2) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 . p(x_i) = 1^2 . \frac{2}{4} + 2^2 . \frac{1}{4} = 1,5$$

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 = (1,5) - (1)^2 = 0,5$$

$$\Rightarrow \quad D.K. = \frac{\sqrt{0,5}}{1} = 0,7$$

ÖRNEK: İki farklı marka otomobil lastiğinden hangisinin tercih edileceğini belirlemek üzere yapılan incelemede A marka lastiklerin ortalama ömürlerinin 40.000 km. ve st. sapmasının 2000 km. olduğu, B marka lastiklerin ortalama ömrünün 50.000 km. ve st. sapmasının 6000 km. olduğu anlaşılıyor. Buna göre hangi markanın tercih edileceğini belirleyiniz.

Çözüm: A markası için

$$\beta_1 = DK_A = \frac{2000}{40.000} = 0.05$$

B markası için

$$\beta_2 = DK_B = \frac{6.000}{50.000} = 0,12$$

$\beta_1 < \beta_2$ olduğundan A marka lastiklerin tercih edilmesi uygundur. Çünkü A markasının yaygınlığı daha azdır.